

•水利工程•

DOI:10.15961/j.jsuese.202201219



## 基于跌坎压力自相似分布的明渠水深-流量关系推求

李乃稳<sup>1,2</sup>, 黄滢淳<sup>2</sup>, 陈小攀<sup>3</sup>, 李龙国<sup>2</sup>, 刘超<sup>1,2\*</sup>

(1.四川大学 山区河流保护与治理全国重点实验室, 四川 成都 610065; 2.四川大学 水利水电学院, 四川 成都 610065;  
3.河南天池抽水蓄能有限公司, 河南 南阳 473000)

**摘要:**明渠流量计量是高效灌溉、合理分配水资源和进行用水有效管理的重要手段。跌水是常见的明渠水流上下游衔接的水利设施。当跌落水流不受跌坎下游水流影响时形成自由跌流,可用于明渠流量的精确计量。受自由跌流影响,跌坎断面水流由缓流向急流转变,压力分布显著偏离静水压力分布规律。而获得跌坎压力分布及其准确描述方程则正是明渠自由跌流流量公式推求的关键,其准确与否决定了利用跌流进行流量计量的精度。本文首先通过模型试验和数值计算对矩形明渠自由跌流的断面压力分布特征进行研究,而后利用理论推导建立了明渠跌流的水深-流量关系公式。研究发现,明渠跌水跌坎断面压力呈典型自相似分布规律,其无量纲压力值分布倾向于一条曲线,压力最大值为 $0.238h_c$  ( $h_c$ 为跌坎水深),出现在竖向距跌坎 $0.209h_c$ 水深处,并且压力自相似分布规律与明渠流量、渠道底坡和边壁糙率无关。在此基础上,结合幂函数和尾迹函数提出了描述跌坎断面压力分布的函数方程,并给出了最大压力和最大压力位置的计算公式,然后根据动量方程和流量连续方程推求了明渠自由跌流的流量计算公式。最后,对本文和其他研究者提出的流量计算公式采用试验数据进行了对比分析,结果表明:本文提出的流量公式在明渠流量为 $5\sim 100\text{ L/s}$ ,底坡为 $-0.0112\sim 0.0534$ 、糙率为 $0.0930\sim 0.0193$ 的研究范围内,具有更高的精度和适用性,计算误差在 $\pm 5\%$ 之内,可适用于该流量、底坡和边壁糙率范围内矩形明渠自由跌流的流量精确计算。本文研究结果对于利用自由跌流进行明渠流量计量提供了理论与技术支撑,具有重要的工程应用价值。

**关键词:**明渠;自由跌水;压力分布;水深-流量关系;流量计量

中图分类号:TV131.4

文献标志码:A

文章编号:2096-3246(2024)01-0218-10

渠道量水是灌溉、水资源高效配置及引供水用水管理的重要手段。目前常用的渠道量水设施有如下几种<sup>[1]</sup>:利用水工建筑物量水,如渠槽、堰闸、渡槽等;利用流速仪量水和特设量水设备量水,如各种量水堰(矩形堰、三角堰等)或量水槽(巴歇尔量水槽)等。这些量水设施存在要么影响渠道过流能力、流量系数确定难度大,要么通过泥沙、漂浮物能力差,或者量测精度低等问题。因此,寻求一种结构简单、测量精确的渠道量水设施则成为目前节水社会建设背景下明渠输水和量水技术研究及发展的重点目标。

在明渠中,跌流为常用的衔接上下游水利设施。当跌落水流不受跌坎下游水流影响时,定义此跌流为自由跌流,此时存在急流到缓流的流态转变,跌坎断面压力分布与静水压力分布规律之间存在巨大偏差<sup>[2-3]</sup>。但此时,跌坎水深与明渠流量之间存在直接对应关系,这种对应关系使得自由跌流可以用作明渠流量的计量。早在1936年,Rouse<sup>[4]</sup>就认识到了这种自由跌流的水力特征并提出了坎末水深比的概念,即跌坎水深与明渠临界水深之比,通过该值可计算渠道流量。之后,研究者为寻求准确适用的跌流流量

收稿日期:2022-11-08

基金项目:国家自然科学基金面上项目(52079084;52379073);四川省重大科技专项(2018SZDZX0027);四川省科技支撑计划项目(2022YFS0472;2023YFS0377);四川大学-泸州校地合作项目(2020CDLZ-6)

作者简介:李乃稳(1975—),博士,副教授。研究方向:水力学;水环境与水生态。E-mail:linaiwen@scu.edu.cn

\*通信作者:刘超, E-mail:liuchao@scu.edu.cn

网络出版时间:2023-01-31 00:00:00

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/51.1773.TB.20230131.1145.001

计算方法,从理论分析、试验研究两个方面进行了大量研究<sup>[5]</sup>,提出了理论或经验或半经验流量计算公式<sup>[6-7]</sup>。基于自由跌流和薄壁堰流二者之间的相似性,一些研究者根据能量方程或动量方程<sup>[8-9]</sup>,提出了底坡为平坡和缓坡的近似理论计算方程。不同研究者提出的流量方程不同之处在于其在推求方程时,针对跌坎压力分布不再符合静水压力分布规律的问题,对能量方程或动量方程中跌坎断面竖向压力分布项采用不同的处理方式<sup>[10]</sup>,如基于跌坎断面零压力分布<sup>[11-12]</sup>,跌坎断面水流流线曲率的Boussinesq近似规律<sup>[13-15]</sup>,跌坎压力为上游平均流断面压力分布的折减系数<sup>[11,16]</sup>,跌坎断面压力二次抛物线分布<sup>[3,17-18]</sup>等。

显然,跌坎断面压力分布是理论或半理论推求其流量方程的关键,假定与实际压力分布之间偏差大小势必会造成流量计算值与实测值存在较大偏差,进而影响利用自由跌流对明渠流量进行计量。

本文利用试验和数值计算相结合的方法,首先利用动量方程,推求了明渠自由跌坎水深和流量之间的理论关系。之后,针对自由跌流水深-流量理论关系推求中的跌坎压力分布这个关键问题,在前期明渠自由跌流水力特性研究的基础上<sup>[19]</sup>,根据试验和数值计算,提出了其压力分布自相似规律方程。在此基础上,提出了明渠跌流流量的理论计算方程,并利用本文和其他研究者实测数据与其他研究者提出的流量计算方程进行了比较,结果表明,本文方程计算更精确,并且适用性更广,能够为利用渠道跌坎进行流量计算提供理论依据和方法。

## 1 跌坎水深-流量关系理论分析

水流在重力作用下在跌坎处跌落,形成自由跌落水流(图1(a)),其流态类似于薄壁堰流,水面线为典型的降水曲线,存在从缓流到急流、均匀流到非均匀流的流态转变,在跌坎临近出现临界水流。在跌坎处,水舌上方和下方均为大气压,即压力 $P=0$ ,跌坎断面压力明显偏离明渠均匀流的静水压力分布规律,压力明显小于静水压力值<sup>[13]</sup>。

如图1所示,O-O断面水深为 $h_0$ ,跌坎e-e断面水深为 $h_e$ , $h$ 为水深, $u$ 为流速, $P$ 为断面压力, $p_y$ 为断面水深 $y$ 处的压强。以O-O与e-e断面及沿渠底与水流自由表面所围成的空间作为控制体,将该段明渠水流看作1维水流,则沿水流方向的动量方程如下:

$$P_0 \cos \phi - P_e \cos \phi - [F_b]_{x=-L}^{x=0} + W \sin \phi = \rho Q (\beta_e v_e - \beta_0 v_0) \quad (1)$$

式中: $P_0$ 为O-O断面上总动水压力,Pa; $P_e$ 为e-e断面上总动水压力,Pa; $[F_b]_{x=-L}^{x=0}$ 为 $x=-L$ 到 $x=0$ 之间渠道对

水体的摩擦阻力,N; $W$ 为水体自重,N; $\phi$ 为渠道底坡与水平面夹角,对明渠而言,底坡 $S = \tan \phi$ ,则 $\cos \phi = 1/\sqrt{1+S^2}$ , $\sin \phi = S/\sqrt{1+S^2}$ ; $\rho$ 为水体密度, $\text{kg/m}^3$ ; $Q$ 为流量, $\text{m}^3/\text{s}$ ; $v_0$ 为O-O断面平均流速, $\text{m/s}$ ; $v_e$ 为e-e断面平均流速, $\text{m/s}$ ; $\beta$ 为动量修正系数, $\beta_0 = \beta_e = 1$ 。

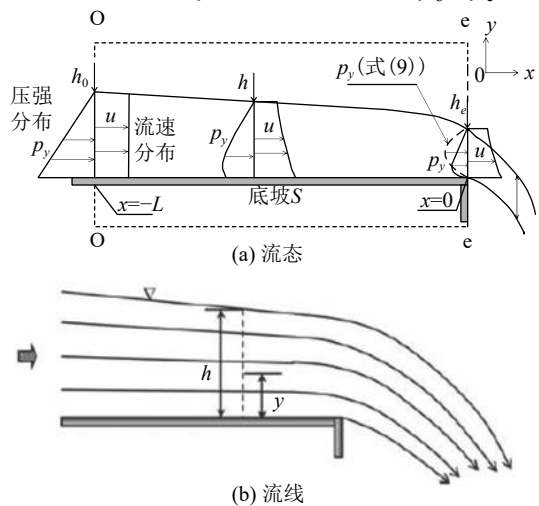


图1 矩形明渠自由跌坎过流示意图

Fig. 1 Schematic view of a typical free overfall

断面O-O水压力分布为静水压力分布,表达式为:

$$P_0 = \frac{1}{2} \rho g b h_0^2 \quad (2)$$

式中: $g$ 为重力加速度,取 $9.81 \text{ m/s}^2$ ; $b$ 为矩形渠道断面宽度,m。

断面O-O( $x=-L$ )到跌水断面e-e( $x=0$ )之间的总摩擦阻力为:

$$[F_b]_{x=-L}^{x=0} = b \int_{-L}^0 \tau dx \quad (3)$$

式中: $\tau$ 为控制体水体所受边界切应力, $\tau = \frac{f}{8} \rho v^2$ ,其中, $v$ 为控制体水流流速,计算中取断面O-O断面和跌坎断面e-e两个过水断面的平均流速,即 $v = \frac{v_0 + v_e}{2}$ , $f$ 为摩擦因数, $f = (2.344 - 21g(k_s/h))^{-2}$ (Kraijenhoff等<sup>[20]</sup>), $h$ 为控制体的水深,m,计算中取两个计算控制断面的平均水深,即 $h = \frac{h_0 + h_e}{2}$ , $k_s$ 为尼古拉兹等效砂粗糙度。则由式(3)可得:

$$[F_b]_{x=-L}^{x=0} = \frac{bL\rho(v_0 + v_e)^2}{32 \left[ 2.344 - 21g \left( \frac{2n^6}{0.038 \cdot 2^6 (h_0 + h_e)} \right) \right]^2} \quad (4)$$

式中, $n$ 为渠道边壁粗糙度系数, $n = 0.038 \cdot 2k_s^{1/6}$ (Guo等<sup>[21]</sup>)。

断面O-O和跌坎断面e-e之间的水体自重为:

$$W = \rho g b \int_{-L}^0 h dx = \frac{1}{2} \rho g b (h_0 + h_e) L \quad (5)$$

断面O-O和跌坎断面e-e之间的距离L,可由式(6)计算<sup>[19]</sup>:

$$L = 3.0 \left( \frac{\sqrt{S}}{n} \right)^{-0.80} \quad (6)$$

如明渠底坡 $S \geq S_c$ ,  $S_c$ 为临界底坡,则在跌坎上游存在均匀流。在明渠均匀流中,有:

$$Q = AC \sqrt{RJ} \quad (7)$$

式中:  $A$ 为过水断面面积,  $A = bh_0$ ;  $C$ 为谢齐系数,  $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$ ;  $R$ 为水力半径,  $R = \frac{bh_0}{b + 2h_0}$ ;  $J$ 为水力坡降,  $J = S$ ; 因此,

$$Q = \frac{bh_0}{n} \left( \frac{bh_0}{b + 2h_0} \right)^{2/3} S^{1/2} \quad (8)$$

由以上公式推导而知,对于式(1),关键是获得跌坎断面e-e的压力分布 $P_e$ 。

## 2 跌坎断面e-e压力分布特征

图1中,跌坎断面e-e的压力分布不符合静水压力分布。假定跌坎处压力为二次抛物线分布<sup>[13]</sup>,对称轴为 $y = 0.5h_e$ ,压力最大值为 $kh_e$ ,其中 $k$ 为压力系数,其值与渠道断面形状有关。

结合边界条件,如在点 $y = 0$ 和 $y_e = h_e$ 处,有 $p_y = 0$ ,则跌坎断面处的压力分布方程为:

$$p_y = -\frac{4k}{h_e} y^2 + 4ky \quad (9)$$

式中, $y$ 为距离跌坎边缘的距离, $p_y$ 为点 $y$ 处的压力。

从式(9)可知, $y = 0.5h_e$ 时,即在0.5倍跌坎水深处, $p_y$ 达到最大值,并且有压力最大值 $p_{\max} = kh_e$ 。根据文献<sup>[13]</sup>研究可知,对于矩形明渠而言, $k = 0.281$ 。图1(a)中点化线即为由式(9)对应的压力分布。事实上,文献<sup>[2]</sup>试验和文献<sup>[22-23]</sup>数值计算表明,跌坎压力分布为严重扭曲形态,而非二次抛物线形态,其跌坎压力最大值点也不是在0.5倍跌坎水深处。

采用模型试验和数值计算相结合,本文对不同底坡和边壁糙率的矩形明渠自由跌流跌坎断面压力分布进行了详细研究,其试验和数值模型如图2所示,试验模型由钢化玻璃制作,并采用粒径分别为0.5~1.0 mm, 1.0~2.0 mm, 2.0~3.0 mm和3.0~5.0 mm的沙粒黏附于渠道边壁而获得不同的渠道曼宁糙率 $n$ 值,经率定<sup>[24]</sup>,其糙率系数对应为 $n = 0.0093, 0.0125, 0.0148, 0.0171, 0.0193$ ;试验中渠道底坡 $S = -0.0112 \sim -0.0534$ ,  $Q = 5 \sim 100$  L/s, 共计152个工况。

数值模型采用VOF结合RANS  $k-\epsilon$ 紊流模型<sup>[25-26]</sup>,基于紊流平衡假设,可以得到近壁处的紊动能和耗

散率值<sup>[22-23]</sup>。模型中尼古拉斯等效砂高度 $k_s$ 由经验公式 $n = 0.038 2k_s^{1/6}$ 给出<sup>[21]</sup>。

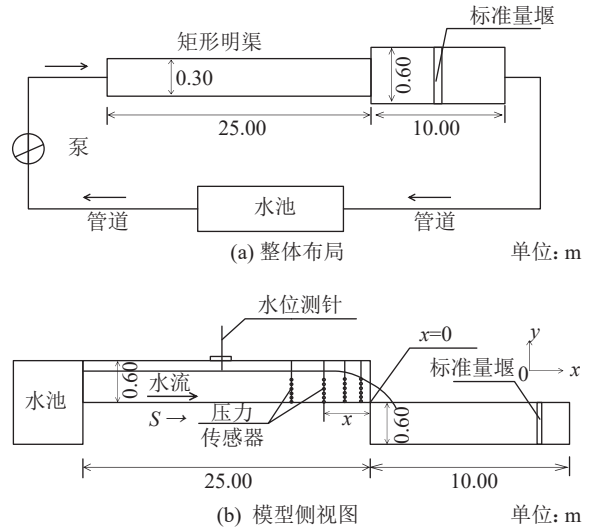


图2 试验装置

Fig. 2 Experimental installation

在跌坎附近不同断面的压力分布如图3~6所示。图3~6中,黑实线为式(9)计算得出的跌坎断面压力分布, $x$ 为跌坎断面e-e坐标0点时的横向坐标值(见图1(a))。图4(a)和图6(a)中,散点数据为模型试验数据。

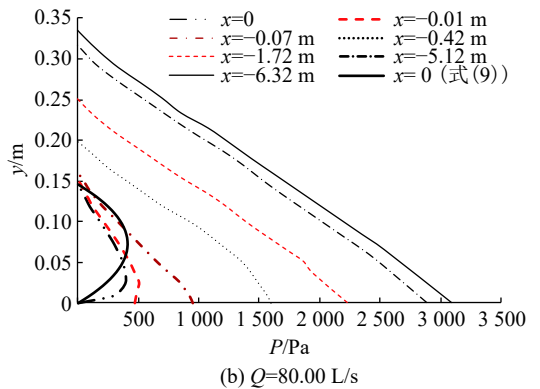
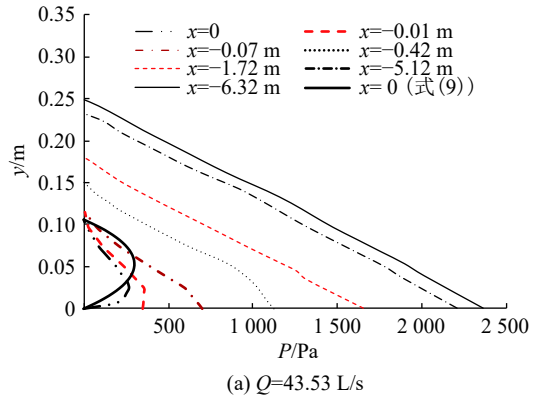
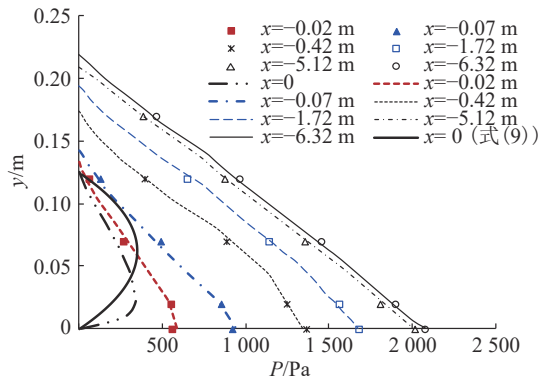
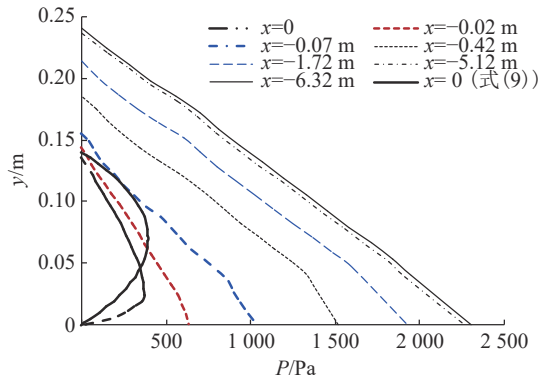


图3 不同断面压力分布( $S = -0.0112$ )

Fig. 3 Pressure distribution at section of  $S = -0.0112$



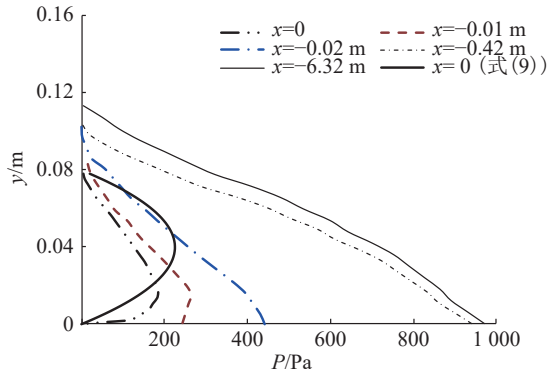
(a)  $Q=66.12$  L/s



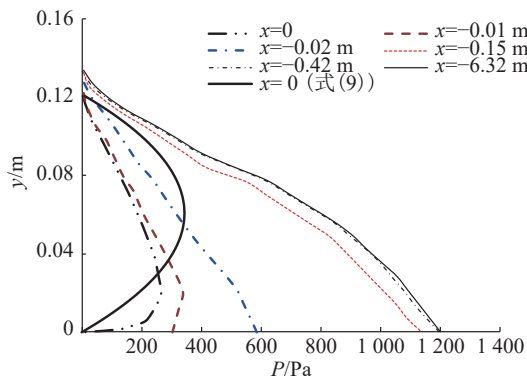
(b)  $Q=80.00$  L/s

图 4 不同断面压力分布 ( $S=0$ )

Fig. 4 Pressure distribution at section  $S=0$



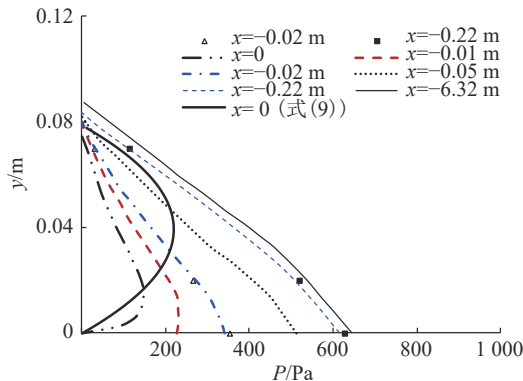
(a)  $Q=43.53$  L/s



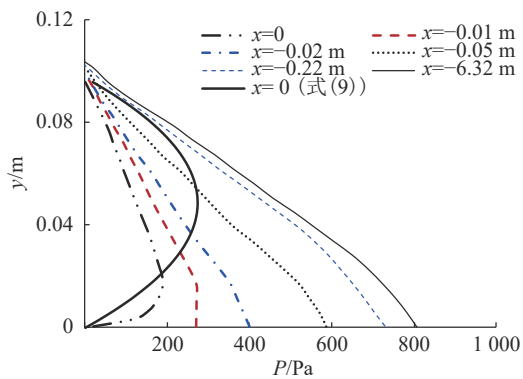
(b)  $Q=80.00$  L/s

图 5 不同断面压力分布 ( $S=0.0112$ )

Fig. 5 Pressure distribution at section  $S=0.0112$



(a)  $Q=58.91$  L/s



(b)  $Q=80.00$  L/s

图 6 不同断面压力分布 ( $S=0.024$ )

Fig. 6 Pressure distribution at section  $S=0.024$

从图3~6可知,底坡 $S$ 和流量 $Q$ 不同时,从跌坎断面至上游各断面,对应断面压力分布形状几乎一致。随着水流临近跌坎,受自由跌流影响,压力逐渐偏离静水压强分布。而在均匀流中,各断面压力分布符合静水压强分布规律。最终,在跌坎断面 $x=0$  m处,压力分布完全不同于静水压力分布而呈现扭曲形态。从水面至最大压力点,压力从0逐渐增加至最大值,而后急剧减小至0,其分布形态也不同于式(9)所描述的二次抛物线形状。在大约 $0.20h_c$ 处,压力达到最大值,而根据式(9),压力最大值应该出现在 $0.5h_c$ 处。

对底坡 $S=-0.0112$ 和 $S=0$ 的明渠,由式(9)计算的 压力最大值与数值计算值吻合良好,并且总压力值也与模拟计算值一致。但对于陡坡渠道(如 $S=0.0112$ 和 $0.0240$ ),随着渠道底坡的增加,由式(9)计算的最大压力值与数值计算的 压力最大值之间的偏差迅速增加。例如,在渠道底坡 $S=0$ 和流量 $Q=80.00$  L/s 时,式(9)计算的 压力最大值为393.76 Pa,而数值计算的 压力最大值为372.71 Pa,二者偏差仅为5.3%。但当渠道底坡 $S=0.0112$ 和流量 $Q=80.00$  L/s 时,式(9)计算的 压力最大值为343.43 Pa,而数值计算的 压力最大值则为265.61 Pa,二者偏差为22.7%。当渠道底坡 $S=0.0240$ 和流量 $Q=80$  L/s 时,式(9)计算的 压力最

大值为273.76 Pa, 数值计算的压力最大值则为182.75 Pa, 二者偏差达到33.2%。

因跌坎断面压力分布存在相似性, 本文引入无量纲数  $\hat{p} = p_y/p_{max}$  和  $\theta = y/h_e$ , 对跌坎断面压力分布进行无量纲化。将  $\theta$  作为 X 轴,  $\hat{p}$  作为 Y 轴, 则  $\hat{p}-\theta$  之间关系曲线如图 7 所示。

- 式 (15)
- $S=0, Q=39.10 \text{ L/s}$
- $S=0, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.005 0, Q=90.00 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=26.80 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.024 0, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.031 9, Q=41.60 \text{ L/s}$
- $S=0.031 9, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=59.43 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=100.00 \text{ L/s}$
- $S=0.053 4, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=-0.011 2, Q=43.53 \text{ L/s}$
- $S=0, Q=66.12 \text{ L/s}$
- $S=0.005 0, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.005 0, Q=100.00 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=43.53 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=100.00 \text{ L/s}$
- $S=0.024 0, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.031 9, Q=52.91 \text{ L/s}$
- $S=0.031 9, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=52.67 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.005 0, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.005 0, Q=110.00 \text{ L/s}$
- $S=0.011 2, Q=70.00 \text{ L/s}$
- $S=0.024 0, Q=40.30 \text{ L/s}$
- $S=0.024 0, Q=92.15 \text{ L/s}$
- $S=0.031 9, Q=64.75 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=47.75 \text{ L/s}$
- $S=0.048 8, Q=80.00 \text{ L/s}$
- $S=0.053 4, Q=70.00 \text{ L/s}$

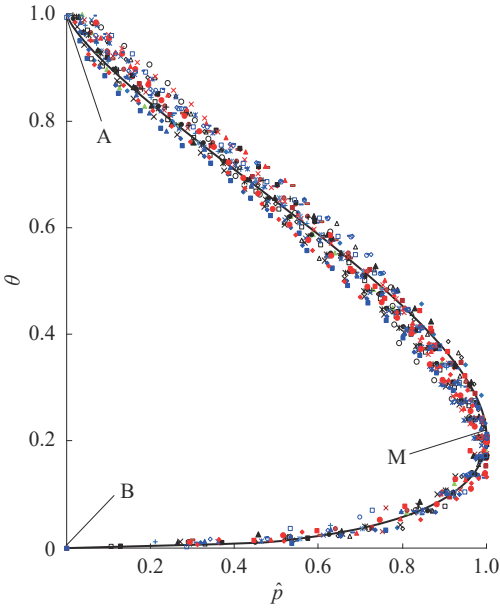


图 7  $\hat{p}-\theta$  断面分布

Fig. 7  $\hat{p}-\theta$  distribution on the end section

由图 7 可知, 底坡  $S$  和流量  $Q$  都不同的矩形渠道, 跌坎断面压力分布呈现非常好的自相似特征, 无量纲压力  $\hat{p}$  倾向于为一条实线分布。在图 7 中存在 3 个特殊点, 即点 A、B、和 M, 其分别对应  $\hat{p}(\theta=1)=0$ ,  $\hat{p}(\theta=0)=0$  和  $\hat{p}(\theta=\theta_m)=1$ , 此处有  $\theta_m = y_m/h_e$ 。也就是说, 在点 M 处 ( $y = y_m$ ), 压力  $p_y$  达到最大值, 此时  $\hat{p}(\theta_m)=1$ 。

引入由幂函数  $\theta^\xi$  和尾迹函数  $(1-\theta)^\gamma$  组成的混合函数来表征图 7 中的无量纲压力分布, 并假定存在如下函数形式:

$$\hat{p}(\theta) = \sigma \theta^\xi (1-\theta)^\gamma \quad (10)$$

式中,  $\sigma$  为系数,  $\xi$  和  $\gamma$  为指数系数。这些系数的值可以由图 7 中的数据确定。

对点 M,  $\hat{p}(\theta=\theta_m)=1$ , 由式 (10) 可得:

$$\sigma = \theta_m^{-\xi} (1-\theta_m)^{-\gamma} \quad (11)$$

对式 (10) 求解  $\hat{p}$  关于  $\theta$  的微分, 可得:

$$\frac{d\hat{p}}{d\theta} = \sigma \xi \theta^{\xi-1} (1-\theta)^\gamma - \sigma \theta^\xi \gamma (1-\theta)^{\gamma-1} \quad (12)$$

在点 M ( $\theta_m = y_m/h_e$ ) 出现压力最大值, 即有  $\hat{p}(\theta = \theta_m) = 1$ , 式 (10) 存在极值。因此, 有  $\frac{d\hat{p}}{d\theta}(\theta = \theta_m) = 0$ 。应用此条件, 由式 (12) 可得:

$$\theta_m = \frac{\xi}{\xi + \gamma} \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (11), 可得:

$$\sigma = \frac{(\xi + \gamma)^{\xi + \gamma}}{\xi^\xi \gamma^\gamma} \quad (14)$$

从式 (14) 可知, 系数  $\sigma$  的值与指数  $\xi$  和  $\gamma$  有关, 可由图 7 中的  $\hat{p}$  数据确定。当指数  $\xi = 0.36$  和  $\gamma = 1.36$  时, 式 (10) 计算值与图 7 中数据吻合最好。因此, 由式 (14) 可得  $\sigma = 2.417$ 。

将此 3 个系数值代入式 (10), 可得:

$$\hat{p} = 2.417 \theta^{0.36} (1-\theta)^{1.36} \quad (15)$$

即:

$$\frac{p_y}{p_{max}} = 2.417 \left(\frac{y}{h_e}\right)^{0.36} \left(1 - \frac{y}{h_e}\right)^{1.36} \quad (16)$$

利用式 (15), 可得图 7 中方程与数据的标准偏差、标准误差和相关系数分别为 0.325、0.044 和 0.991。最大压力点为  $\theta_m = 0.209$ , 此值与图 7 数据得值非常一致。由图 7 数据可知, 当  $\theta_m = 0.202$  时, 压力达到最大值。

由式 (15) 计算值与文献 [2]、[22] 的实验值对比如图 8 所示。

由图 8 可知, 方程式 (15) 计算值与文献 [2] 和 [22] 的试验值吻合良好, 说明本文提出由幂函数和尾迹函数组成的混合函数可以用于准确描述跌坎处压力竖向分布规律。图 8 中计算值与试验值出现一定量偏差, 是由于文献 [2] 的试验水槽长度较短、或者较低流量时水位测针对水流的干扰, 或者陡坡渠道小流量时水面的剧烈波动而造成。

试验测得跌坎断面 e-e 最大压力值  $p_{max}$ , 其与跌坎水深  $h_e$  之间对应关系如图 9 所示, 同时将文献 [2] 的试验值也一并列入。

由图 9 可知, 跌坎断面最大压力值  $p_{max}$  与跌坎水深  $h_e$  间存在良好的线性关系, 经线性回归, 可得:

$$\frac{p_{max}}{\rho g} = 0.238 h_e \quad (17)$$

式 (17) 的相关系数为  $R^2 = 0.937$ , 说明  $p_{max}$  与  $h_e$  存在良好的线性关系。同时, 由图 9 可知, 由式 (17) 所得的最大压力计算值与文献 [2] 的试验值也吻合一致。

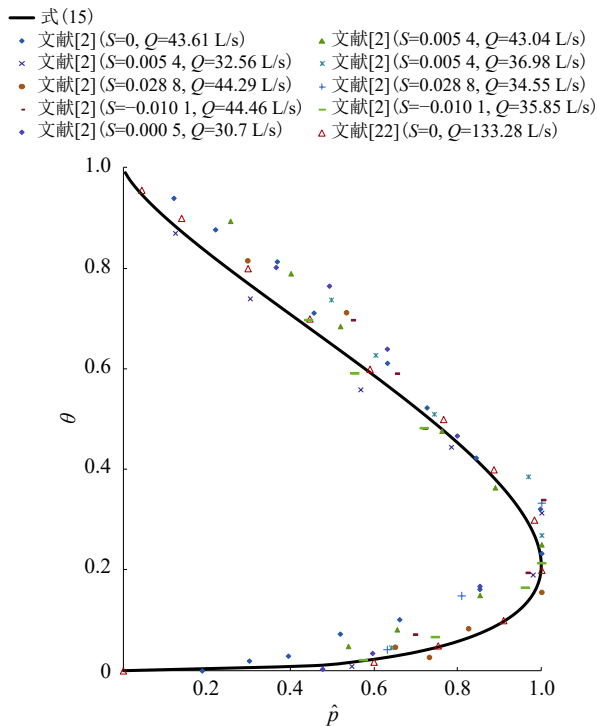


图 8 式(15)与文献试验值对比

Fig. 8 Comparison between results of Eq.(15) and previous studies

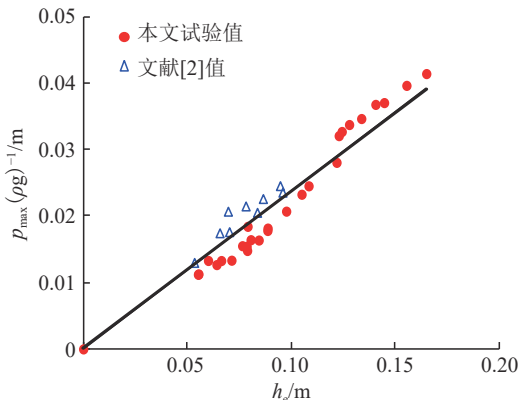


图 9  $p_{\max}(\rho g)^{-1}$ 和跌坎水深 $h_e$ 间关系

Fig. 9 Relationship between  $p_{\max}(\rho g)^{-1}$  and end depth  $h_e$

将式(17)代入式(16), 则可得跌坎断面压力 $p_y$ 的计算公式:

$$p_y = 0.575\rho gh_e \left(\frac{y}{h_e}\right)^{0.36} \left(1 - \frac{y}{h_e}\right)^{1.36} \quad (18)$$

跌坎断面e-e的总压力为:

$$P_e = b \int_0^{h_e} p_y dy \quad (19)$$

则:

$$P_e = b \int_0^{h_e} 0.575\rho gh_e \left(\frac{y}{h_e}\right)^{0.36} \left(1 - \frac{y}{h_e}\right)^{1.36} dy \quad (20)$$

对式(20)进行积分变换并求解得:

$$P_e = 0.145b\rho gh_e^2 \quad (21)$$

### 3 跌坎水深-流量关系方程推求与应用

#### 3.1 陡坡渠道

将式(2)(4)~(6)和(21)代入式(1), 并积分整理得:

$$\frac{Q^2}{gb} \left[ b \left( \frac{1}{h_e} - \frac{1}{h_0} \right) + \frac{S \left( \frac{\sqrt{S}}{n} \right)^{-0.80} \left( \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_e} \right)^2}{10.63gb \left[ 2.344 - 21g \left( \frac{2n^6}{0.038 \cdot 2^6 (h_0 + h_e)} \right) \right]^2} \right] = \frac{0.50h_0^2 - 0.145h_e^2}{\sqrt{1+S^2}} + \frac{1.5 \left( \frac{\sqrt{S}}{n} \right)^{-0.80} S (h_0 + h_e)}{\sqrt{1+S^2}} \quad (22)$$

式(22)为 $Q$ 和 $h_0, h_e$ 的隐函数, 根据测量的 $h_e$ 值并结合式(8)可迭代求取 $h_0$ , 进而利用式(8)计算不同底坡 $S$ 和糙率 $n$ 的明渠流量。

式(22)在推求过程中利用了渠道均匀流式(7), 均匀流只有在渠道底坡为陡坡, 即渠道底坡 $S \geq S_c$ 时, 跌坎上游才会出现均匀流流态。而对于渠道底坡 $S < S_c$ 的缓坡或平坡甚至逆坡渠道, 则跌坎上游不会出现均匀流流态, 因而式(22)不能适用于渠道底坡为缓坡、平坡或逆坡渠道的流量计算。

#### 3.2 缓坡或平坡渠道

对于底坡 $S$ 为缓坡、平坡或逆坡的矩形明渠, 水流自跌坎自由跌落时, 其流态存在缓流到急流的流态转变, 因而跌坎上游出现临界流, 逆坡渠道水流流态等同视为平坡。此时, O-O断面为临界流断面, 断面水深为临界水深 $h_c$ , 则 $h_0 = h_c$ 。对于临界流, 有:

$$Q = bg^{0.5} h_c^{\frac{3}{2}} \quad (23)$$

此时, 可以将自由跌流近似为堰高为0的薄壁堰流<sup>[9,13]</sup>, 因此可以应用推导薄壁堰流流量计算公式的方法推求其流量计算公式, 则有:

$$dQ = b \sqrt{2g} \sqrt{H-y} dy \quad (24)$$

式中,  $H$ 为O-O断面的总水头,  $H = h_c + \frac{v_c^2}{2g}$ , m。在跌坎处, 水流受重力影响而流速增加, 水深减小, 水深 $h_e = C_c h_c$ ,  $C_c$ 表示反映跌坎处的水流垂直收缩系数。因此, 总流量可表示为:

$$Q = bC_c \int_0^{h_c} \sqrt{2g} \sqrt{H-y} dy \quad (25)$$

对式(25)积分并整理, 得:

$$Q = bC_c \frac{2\sqrt{2g}}{3} (H^{\frac{3}{2}} - (H - h_c)^{\frac{3}{2}}) \quad (26)$$

对临界流O-O断面,有:

$$Fr_c = \frac{v_c}{\sqrt{gh_c}} = 1 \quad (27)$$

则:

$$H = h_c + \frac{gh_c}{2g} = 1.5h_c \quad (28)$$

故由式(26)和(28)可得:

$$Q = 1.484b \frac{2\sqrt{2g}}{3} \frac{h_c^{\frac{3}{2}}}{h_c} h_c^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

由式(23)和式(29)可得:

$$C_c = \frac{h_c}{h_c} = 0.715 \quad (30)$$

式(30)所得 $h_e/h_c$ 值与文献[4]的试验值(0.715)、刘清朝<sup>[27]</sup>、杨永森等<sup>[28]</sup>的数值计算值(0.720, 0.716)基本一致。由式(30)可知,对于缓坡和平坡明渠,自由跌流处水深 $h_e$ 与上游临界流断面O-O水深 $h_c$ 之比值 $h_e/h_c$ ,即水流垂直收缩系数 $C_c$ 值为常数。因此,由式(30)和式(23)可得:

$$Q = 5.179bh_c^{\frac{3}{2}} \quad (31)$$

文献[9]假定跌坎处0压力分布,运用能量方程得到了矩形明渠流量计算公式:

$$Q = Fr_o \left( \frac{(2 + Fr_o^2)^{\frac{3}{2}} - Fr_o^3}{3Fr_o} \right)^{\frac{2}{3}} bg^{\frac{1}{2}} h_c^{\frac{3}{2}} \quad (32)$$

式中, $Fr_o$ 为O-O断面(图1)水流弗劳德数。

对于平坡或缓坡渠道,O-O断面 $Fr_o = Fr_c = 1$ ,则由式(32)可得:

$$Q = 5.181bh_c^{\frac{3}{2}} \quad (33)$$

与本文式(31)基本一致。

Dey<sup>[29]</sup>假定渠底流线曲率为0,利用Boussinesq近似来寻求跌坎处的压力分布规律,进而运用动量方程,得到粗糙矩形明渠流量计算公式为:

$$Q = \hat{Q}bg^{0.5}k_s^{1.5} \quad (34)$$

式中, $\hat{Q}=1/\tilde{k}_s^{1.5}$ ,其中, $\tilde{k}_s = \hat{k}_{se}\tilde{h}_e$ , $\hat{k}_{se} = k_s/h_e$ , $\tilde{h}_e = \hat{h}_e/\hat{S}^{\frac{3}{10}}$ , $\hat{h}_e = h_e/h_o$ , $\hat{S} = S/S_c$ 。

Tigrek等<sup>[30]</sup>在大量试验的基础上,采用量纲分析的方法提出如下流量计算经验公式:

$$\begin{cases} Q = 5.549bh_c^{\frac{3}{2}}, & S < S_c; \\ Q = \frac{bg^{0.5}(h_e)^{1.5}}{\left(0.773 - 0.018\frac{\sqrt{S}}{n}\right)^{1.5}}, & S > S_c \end{cases} \quad (35)$$

从上述明渠跌水流量计算公式推求可以看出,对于陡坡渠道( $S > S_c$ ),流量除了和宽度 $b$ 和跌坎水深 $h_e$ 有关外,还与渠道底坡 $S$ 和边壁糙率系数 $n$ 均有关。而对于缓坡或平坡及逆坡渠道( $S < S_c$ ),流量仅和宽度 $b$ 和跌坎水深 $h_e$ 有关,而与渠道底坡 $S$ 和边壁糙率系数 $n$ 无关。

根据本文试验获得的 $h_e$ ,由式(8)和式(22)及式(31)(32)(34)(35)计算得到的流量计算值 $Q_c$ 和实测值 $Q_T$ 之间的比较,结果如图10所示。

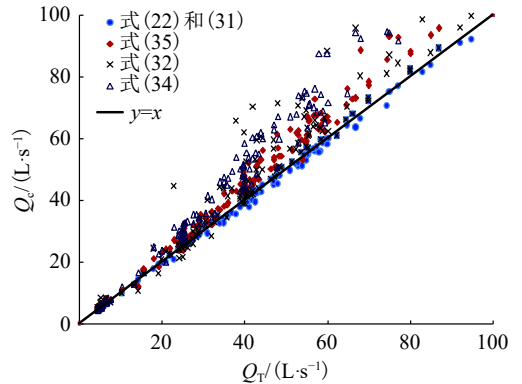


图 10 不同公式计算得到的流量 $Q$ 计算值与实测值比较  
Fig. 10 Comparison of calculated and tested flow by different equations proposed by researchers

由图10可知,基于压力分布和动量方程提出的流量公式计算所得的计算值与实测值基本一致,对缓平坡( $S < S_c$ )渠道,相对误差在2%以内,而陡坡渠道( $S > S_c$ ),其相对误差91.5%的值控制也在5%之内,达到较高的计算精度。而式(32)(34)(35)则仅在缓平坡渠道中计算值较准确(5%内),而在陡坡渠道中,流量计算值与实测值偏差较大,最大计算误差甚至超过47.2%。

由上述理论和试验数据对比分析可见,对于跌坎断面压力分布如何处理是推求矩形跌流流量公式的关键,其不同的压力分布假定对流量公式计算精度具有重要影响。本文提出的跌坎断面压力分布规律方程对渠道糙率 $n$ 和底坡 $S$ 具有适用性,即在自由跌流流态下,跌坎断面压力分布规律具有自相似性,可由幂函数和尾迹函数构成的混合函数表述,不受渠道糙率 $n$ 和底坡 $S$ 变化值的影响。并且,本文试验中,渠道边壁糙率 $n$ 值在0.009 3~0.019 3之间,底坡 $S$ 在-0.011 2~0.053 4之间,公式具有较宽的应用范围。而文献[29]假定跌坎断面压力分布Boussinesq近似、

文献[9]假定跌坎断面0压力分布,都与实际压力分布偏差较大,因而造成计算误差也较大,甚至达到60%。文献[30]中, $n = 0.0091$ 和 $n = 0.0147$ , $n$ 值较少,故其经验公式计算值与本文试验值也偏差较大,误差在30%以内。

为进一步证实本文明渠流量计算式(22)和式(31)的适用性,文献[31]和[24]的试验数据用来比较其测量值与式(22)及(31)计算值之间的差异性,结果如图11所示。

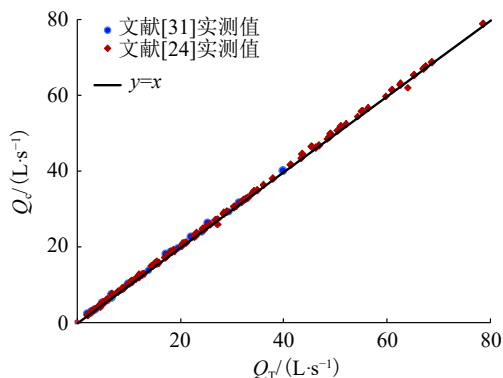


图11 式(22)和(31)流量计算值文献实测值对比

Fig. 11 Comparison of the calculated flow by Eqs.22 & 31 and tested from references

由图11可知,本文公式计算值与文献[24]和[31]实测值吻合良好。本文公式的计算值与试验值87.5%的误差在5%之内,只有极少数值的计算误差超过10%,表明本文提出的流量计算公式具有较高的计算精度。

## 4 结论

本文通过理论分析、模型试验并结合数值计算的方法,对矩形明渠跌流的断面压力分布及流量-水深关系进行了深入研究,明渠流量范围为5~100 L/s,底坡范围为-0.0112~0.0534,边壁糙率系数为0.0093~0.0193,包括逆坡、平坡、缓坡和陡坡的粗糙明渠。主要结论如下:

1) 跌坎断面受自由跌流影响,压力分布显著偏离静水压强分布规律,但具有高度的自相似性,而这种自相似性与明渠边壁糙率和底坡无关,并提出了跌坎压力分布方程。

2) 利用动量方程推求了矩形渠道自由跌流的流量计算公式。本文公式相较于文献[9, 29-30]流量计量公式具有更高的精度和更宽应用范围,并且与文献[24, 31]试验数据一致。

3) 本文公式不仅适用于逆坡、平坡、缓坡和陡坡明渠流量计量,而且还适用于光滑和粗糙明渠流量

计量明渠自由跌流的流量计量,针对平坡或缓坡渠道(无论光滑壁面还是粗糙壁面),其流量计量更加准确(误差在2%以内),具有重要的工程应用价值。

4) 因在推求过程中考虑了断面压力、阻力和重力,式(22)为流量 $Q$ 的隐函数,形式较为复杂,同时式(22)不适用于平坡或缓坡渠道,因而应与式(31)结合,才可解决底坡和糙率变化的明渠自由跌流进行流量计量的问题,这可能限制公式的应用,因此,有必要在大量试验和理论分析的基础上,寻求更具有适用性的统一简化形式。

5) 当跌坎下游水深增加到一定值,其对跌落水流形成壅托,造成临界水流消失,此时水流为非自由跌落水流,跌坎下游水深会影响跌坎水深和流速,进而影响流量计量,此种情况下的明渠跌坎流量变化及其计算需进一步研究。

## 参考文献:

- [1] Yang Chunlei, Cai Shouhua, Wang Dianhong, et al. Review on research of discharge measuring technique in irrigation district[J]. *Journal of Irrigation and Drainage*, 2017, 36(Supp2): 34-38. [杨春蕾, 蔡守华, 王滇红, 等. 灌区量水技术发展历程及研究进展[J]. *灌溉排水学报*, 2017, 36(增刊2): 34-38.]
- [2] Rajaratnam N, Muralidhar D. Characteristics of the rectangular free overfall[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1968, 6(3): 233-258.
- [3] Rajaratnam N, Muralidhar D. The trapezoidal free overfall[J]. *Journal of Hydraulic Research*, 1970, 8(4): 419-447.
- [4] Rouse H. Discharge characteristics of the free overfall[J]. *Civil and Environmental Engineering*, 1936, 6(4): 257-260.
- [5] Dey S. Free overfall in open channels: State-of-the-art review [J]. *Flow Measurement and Instrumentation*, 2002, 13(5/6): 247-264.
- [6] Anderson M V. Non-uniform flow in front of a free overfall [J]. *Acta Polytechnica Scandinavia*, 1967, 42: 1-24.
- [7] Hager W H. Hydraulics of plane free overfall[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1983, 109(12): 1683-1697.
- [8] Anastasiadou-Partheniou L, Hatzigiannakis E. General end-depth-discharge relationship at free overfall in trapezoidal channel[J]. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 1995, 121(2): 143-151.
- [9] Ferro V. Theoretical end-depth-discharge relationship for free overfall[J]. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 1999, 125(1): 40-44.
- [10] Dey S, Kumar B R. Hydraulics of free overfall in  $\Delta$ -shaped channels[J]. *Sadhana*, 2002, 27(3): 353-363.
- [11] Ahmad Z. Quasi-theoretical end-depth-discharge relation-

- ship for rectangular channels[J].*Journal of Irrigation and Drainage Engineering*,2003,129(2):138–141.
- [12] Navabi S V,Beirami M K,Chamani M R,et al.Free overfalls in flat-based circular and U-shaped channels[J].*Flow Measurement and Instrumentation*,2011,22(1):17–24.
- [13] Ahmad Z,Azamathulla H M.Quasi-theoretical end-depth–discharge relationship for trapezoidal channels[J].*Journal of Hydrology*,2012,456/457:151–155.
- [14] Rashwan I M H,Idress M I.Brink as a device for measurement discharge for partially filled circular channel[J].*Ain Shams Engineering Journal*,2013,4(2):133–141.
- [15] Vatankhah A R.Direct solution for discharge in generalized trapezoidal free overfall[J].*Flow Measurement and Instrumentation*,2013,29:61–64.
- [16] Vatankhah A R.Power-law free overfall in subcritical flow regime[J].*Ain Shams Engineering Journal*,2015,6(2):399–402.
- [17] Noori B M A,Ibrahim S S.Effect of bed and side slopes on flow measurements in trapezoidal free overfall channels[J].*Arabian Journal for Science and Engineering*,2016,41(10):4187–4194.
- [18] Dai Shubing,Jin Sheng.Hydraulics of free overfall in steeply sloping rough rectangular channel:A general computational approach[J].*Flow Measurement and Instrumentation*,2019,69:101625.
- [19] Li Naiwen,He Meng,Liu Chao,et al.Hydraulic characteristics of free overfall in a steep and rough rectangular channel[J].*Advanced Engineering Science*,2019,51(6):83–89.[李乃稳,何孟,刘超,等.陡坡粗糙矩形明渠中自由跌流的水力特性[J].*工程科学与技术*,2019,51(6):83–89.]
- [20] Kraijenhoff D A,Dommerholt A.Brink depth method in rectangular channel[J].*Journal of the Irrigation and Drainage Division*,1977,103(2):171–177.
- [21] Guo Yakun,Zhang Lixiang,Shen Yongming,et al.Modeling study of free overfall in a rectangular channel with strip roughness[J].*Journal of Hydraulic Engineering*,2008,134(5):664–667.
- [22] Ramamurthy A S,Junying Qu,Diep Vo.Volume of fluid model for an open channel flow problem[J].*Canadian Journal of Civil Engineering*,2005,32(5):996–1001.
- [23] Ramamurthy A S,Junying Qu,Diep Vo.VOF model for simulation of a free overfall in trapezoidal channels[J].*Journal of Irrigation and Drainage Engineering*,2006,132(4):425–428.
- [24] Firat C E.Effect of roughness on flow measurements in sloping rectangular free overfall [D].Ankara:Middle East Technical University,2004.
- [25] Yakhot V,Orszag S A,Thangam S,et al.Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique[J].*Physics of Fluids A:Fluid Dynamics*,1992,4(7):1510–1520.
- [26] Ferziger J H,Peric M.Computational method for CFD[M].3rd ed.New York:Springer,2002.
- [27] Liu Qingchao.Hydraulic characteristics of free overfall[J].*Journal of Hydraulic Engineering*,1990,21(11):8–17.[刘清朝.自由跌流的水力特性[J].*水利学报*,1990,21(11):8–17.]
- [28] Yang Yongsun,Yang Yongquan.Hydraulic character of free overfall[J].*Advances in Water Science*,2000,11(2):148–152.[杨永森,杨永全.自由跌流的水力特性[J].*水科学进展*,2000,11(2):148–152.]
- [29] Dey S.End depth in steeply sloping rough rectangular channels[J].*Sadhana*,2000,25(1):1–10.
- [30] Tiğrek Ş,Firat C E,Ger A M.Use of brink depth in discharge measurement[J].*Journal of Irrigation and Drainage Engineering*,2008,134(1):89–95.
- [31] Davis A C,Ellett B G S,Jacob R P.Flow measurement in sloping channels with rectangular free overfall[J].*Journal of Hydraulic Engineering*,1998,124(7):760–763.

## Quasi-theoretical End-depth–Discharge Relationship Based on the Pressure Distribution at the End of Free Overfall for Rough Rectangle Channels

LI Naiwen<sup>1,2</sup>, HUANG Yanchun<sup>2</sup>, CHEN Xiaopan<sup>3</sup>, LI Longguo<sup>2</sup>, LIU Chao<sup>1,2\*</sup>

(1.State Key Lab. of Hydraulics and Mountain River Eng., Sichuan Univ., Chengdu 610065, China;

2.College of Water Resource & Hydropower, Sichuan Univ., Chengdu 610065, China;

3.Henan Tianchi Pumped Storage Power Co., Ltd., Nanyang 473000, China)

**Abstract:** Flow measurement is an important means for irrigation, efficient allocation of water resources and water diversion management. In the open channel, the overfall is usually applied as a facility connecting the upstream and downstream. When the overfall is not affected by the flow of downstream, the overfall is classified as a free one, which can be used as a discharge measurement by a single measurement of depth at the end of the channel. At this condition, the flow pattern changes from a subcritical flow into a supercritical one, and the pressure distribution in the end section deviates greatly from the hydrostatic pressure distribution with a skewed shape, which is the key to derive the discharge formula by en-

ergy equation and momentum equation. In this study, the characteristics of sectional pressure distribution of free overfall in a rectangular open channel were studied by model test and numerical calculation, and then the water depth-flow relationship formula of open channel with free overfall was established. It was found that the pressure of the end section was conformed to the self-similar distribution law, as the distribution of dimensionless pressure values tended to be the same curve, in which the maximum value was  $0.238h_e$  (here  $h_e$  was water depth of end section) and it occurred at  $0.209h_e$  distancing from the end fall. The above findings are independent of the flow discharge, bottom slope and side wall roughness. Based on these findings, a simple formula combining a power function and wake function was proposed to describe the pressure distribution at the end section. Then using the momentum equation and continuity equation, a quasi-theoretical end-depth-discharge relationship was proposed. With the known end depth, bed slope and Manning's coefficient, the discharge could be direct solved by the proposed equations. The proposed equation was valid over the entire practical ranges of  $Q=5\sim 100$  L/s,  $S=0.011\ 2\sim 0.053\ 4$ ,  $n=0.093\ 0\sim 0.019\ 3$ , and they showed excellent agreement with the available experimental data in this paper and from others, with the precision of  $\pm 5\%$ . The proposed formula for discharge is a useful computational tool for estimation of discharge in rough bed rectangular open channels. The results of this paper provide theoretical and technical supports for the open channel discharge measurement using free over flow, which is important to the application of free overfall as a discharge measure device.

**Key words:** rectangular channel; free overfall; pressure distribution; end-depth-discharge relationship; flow measurement

(编辑 张 琼)

引用格式:Li Naiwen,Huang Yanchun,Chen Xiaopan,et al.Quasi-theoretical end-depth-discharge relationship based on the pressure distribution at the end of free overfall for rough rectangle channels[J].Advanced Engineering Sciences,2024,56(1): 218-227.[李乃稳,黄滢淳,陈小攀,等.基于跌坎压力自相似分布的明渠水深-流量关系推求[J].工程科学与技术,2024,56(1): 218-227.]